305

F

305F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

صبح جمعه

۹۱/۱/۲۵

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری

سازمان سنجش آموزش کشور

آزمـــون ورودی
دوره‌های دکتـــری (نیمه متمرکز) داخـــل
در ســـال ۱۳۹۱

رشتــــه‌ی
ریاضی کاربردی (کد ۲۲۳۴)

نام و نام خانوادگی داوطلب: شماره داوطلبی:

تعداد سؤال: ۴۵ مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱، جبر خطی، آنالیز عددی۱، آنالیز عددی پیشرفته، آنالیز حقیقی ۱، تحقیق در عملیات پیشرفته۱)	۴۵	۱	۴۵

فروردین سال ۱۳۹۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و $f(\mathbb{R})$ در $\mathbb{R}$ بسته باشد، آنگاه f پیوسته است.

۲) فضای متریک (X,d) فشرده است اگر و تنها اگر هر تابع پیوسته بر X، پیوسته یکنواخت باشد.

۳) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ پیوسته باشد، آنگاه مشتق‌پذیر است.

۴) اگر (X,d_1) و (Y,d_2) دو فضای متریک و $a\in X$ و $f:X\to Y$ تابعی مفروض باشد، آنگاه f در a پیوسته است اگر و تنها اگر به ازای هر تابع $g:Y\to\mathbb{R}$ که در $f(a)$ پیوسته است، $g\circ f$ در a پیوسته باشد.

۲- فرض کنید $a_n\geq 0$ و $\sum_{1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p>\frac{1}{2}$.

۲) سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p\geq\frac{1}{2}$.

۳) سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست اگر و تنها اگر $p>1$.

۴) اگر $p>\frac{1}{2}$، آنگاه سری $\sum_{1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n^p}$ همگراست.

۳- برای تابع مشتق‌پذیر $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

الف) اگر $f^{-1}(\{0\})$ ناشمارا باشد آنگاه $c\in(0,1)$ موجود است به طوری که $f(c)=f'(c)=0$.

ب) اگر f' کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ موجود و متناهی است.

ج) اگر f پیوسته یکنواخت باشد آنگاه f' کراندار است.

د) اگر f' یک به یک باشد آنگاه f' پیوسته است.

۱) گزاره‌های (ب)، (ج) درست هستند ولی (الف) و (د) نادرست می‌باشند.

۲) گزاره‌های (الف)، (ج) و (د) درست هستند ولی (ب) نادرست است.

۳) گزاره‌های (الف) و (ب) درست هستند ولی (ج) و (د) نادرست می‌باشند.

۴) گزاره‌های (الف)، (ب) و (د) درست هستند ولی (ج) نادرست است.

۴- اگر (X,d) یک فضای متریک و A زیرمجموعه‌ای فشرده و B زیرمجموعه‌ای بسته در X باشند که $A\cap B=\phi$ ، کدام گزینه الزاماً برقرار نیست؟

۱) اگر $X=\mathbb{R}$ و d متر اقلیدسی باشد، مجموعه‌ی $Y=\{b\sin a : b\in B, a\in A\}$ بسته است.

۲) زیرمجموعه‌های باز U و V از X موجودند که $A\subset U, B\subset V, \overline{U}\cap\overline{V}=\phi$.

۳) نقاط $a_\circ\in A$ و $b_\circ\in B$ موجودند که $d(a_\circ, b_\circ)=\inf\{d(a,b): a\in A, b\in B\}$.

۴) داریم $d(A,B)=\inf\{d(a,b): a\in A, b\in B\}>\circ$، اما اگر شرط بسته بودن را جایگزین شرط فشرده بودن A کنیم ممکن است این نتیجه برقرار نباشد.

۵- مجموعه نقاط حدی مجموعه $\{\sqrt{m}-\sqrt{n} \mid m.n\in\mathbb{N}\}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$

۲) ϕ (مجموعهٔ تهی)

۳) $\{\circ\}$

۴) $\mathbb{Z}$ (مجموعهٔ اعداد صحیح)

۶- فرض کنید A و B دو زیر مجموعهٔ کراندار و غیر تهی از اعداد حقیقی باشند. تساوی $\sup A=\inf B$ با کدام گزینه معادل است؟

۱) برای هر $a\in A$، $b\in B$ وجود دارد به قسمی که $a\leq b$ و برای هر $\varepsilon>\circ$، $a\in A$ و $b\in B$ وجود دارند به قسمی که $b-a\leq\varepsilon$.

۲) برای هر $a\in A$ و هر $b\in B$، $a\leq b$ و برای هر $\varepsilon>\circ$، $a\in A$ و $b\in B$ وجود دارند به قسمی که $b-a\leq\varepsilon$.

۳) برای هر $a\in A$ و هر $b\in B$، $a\leq b$ و برای هر $a\in A$ و هر $\varepsilon>\circ$، $b\in B$ وجود دارد به قسمی که $b-\varepsilon<a$.

۴) برای هر $\varepsilon>\circ$ و هر $a\in A$، $b\in B$ وجود دارد که $a+\varepsilon>b$ و برای هر $b\in B$، $a\in A$ وجود دارد که $b-\varepsilon<a$.

۷- فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ باز و بی‌کران و $f: A \to \mathbb{R}$ به طور یکنواخت پیوسته باشد. هر گاه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی در A باشد، آنگاه:

۱) دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ کراندار است ولی لزوماً همگرا نیست.

۲) دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ لزوماً همگرا نیست اما دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا است.

۳) دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ همگرا است.

۴) هر زیر دنبالهٔ $\{f(x_n)\}$ زیر دنباله‌ای دارد که در $f(A)$ همگرا است.

۸- اگر A یک ماتریس وارون‌پذیر ۳ × ۳ با درآیه‌ها در میدان $\mathbb{R}$ باشد و داشته باشیم $trA = trA^{۲} = ۰$ و $\det A = ۱$، آنگاه:

۱) $A^{۳} = A + I$

۲) $A^{۳} = I$

۳) $A^{۲} = I$

۴) $A^{۳} = A^{۲} + I$

۹- ماتریس $n \times n$ مانند A که $n > ۱$، با درایه‌های مختلط در تساوی $A^n = ۲A$ صدق می‌کند. در این صورت:

۱) A مثلثی شدنی نیست.

۲) A قطری شدنی نیست.

۳) A قطری شدنی است.

۴) A مثلثی شدنی است ولی قطری شدنی نیست.

۱۰- چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس $A \in M_n(\mathbb{R})$ عبارتست از $x^{۲} - ۱$ و چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$ عبارتست از $x^{۲} + ۱$. اگر $AB = BA$، چند جمله‌ای می‌نیمال ماتریس AB عبارتست از:

۱) $x^{۴} - ۱$

۲) $x^{۲} + ۱$

۳) $x^{۲} - ۱$

۴) $x^{۴} + ۱$

۱۱- فرض کنید $A,B \in M_n(\mathbb{R})$. کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $|\operatorname{rank}(AB)-\operatorname{rank}(BA)| \le \operatorname{rank}(AB-BA)$

۲) $\operatorname{rank}(AB-BA) \le \operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$

۳) $\operatorname{rank}(AB-BA) \le ۲\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$

۴) $\operatorname{rank}(AB-BA) \le \left[\frac{n}{۲}\right]$

۱۲- فرض کنید $A,B \in M_n(\mathbb{C})$ به طوری که A در چند جمله‌ای مشخصه B صدق می‌کند و B نیز در چند جمله‌ای مشخصه A صدق می‌کند. کدام گزینه صحیح است؟

۱) مجموعه مقادیر ویژهٔ متمایز A با مجموعه مقادیر ویژهٔ متمایز B برابر است.

۲) A و B رتبه یکسان دارند. $(\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B))$

۳) A و B چند جمله‌ای مشخصه یکسان دارند.

۴) A قطری شدنی است اگر و فقط اگر B قطری شدنی باشد.

۱۳- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و به ازای هر عدد طبیعی m، $\operatorname{tr}(A^m)=۰$. در این صورت در مورد A چه می‌توان گفت؟

۱) $A^۲+I$ وارون‌ناپذیر است.

۲) $A^۲-I$ وارون‌ناپذیر است.

۳) A پوچتوان است.

۴) $\operatorname{tr}(AB)=۰$ برای هر ماتریس $B \in M_n(\mathbb{R})$.

۱۴- فرض کنید $A \in M_n(\mathbb{R})$ و $f(x)$ چند جمله‌ای مشخصه A باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (منظور از $A(i|j)$ زیر ماتریسی از A است که از حذف سطر i ام و ستون j ام به دست آمده است.)

۱) $f'(x)=\sum_{j=۱}^{n} x\det(xI-A(j|j))$

۲) $f'(x)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\det(xI-A(i|j))$

۳) $f'(x)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} x\det(xI-A(i|j))$

۴) $f'(x)=\sum_{j=۱}^{n}\det(xI-A(j|j))$

۱۵- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده، برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۷ با ۲ رقم مانتیس و روش بریدن، فاصله بین عدد ۶ و نزدیکترین عدد قابل نمایش دیگر چقدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{7}$

۳) $\frac{1}{7^2}$

۴) $\frac{1}{5}$

۱۶- تخمین $f(x)=\cos 2x$ در فاصله $[0,\pi]$ با توابع تکه‌ای خطی را در نظر بگیرید. تعداد زیربازه‌های مساوی در این بازه حداقل چقدر باشد تا کران بالای خطای برشی تخمین در این بازه کمتر از یا مساوی با $\frac{10^{-8}}{18}$ باشد؟

۱) اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی 300π

۲) اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی 12π

۳) اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی 3π

۴) اولین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی 30000π

۱۷- اگر $f(x)=\cos\frac{x}{2}$، آنگاه مقدار کسرهای تفاضلی $f[0,0,0,0]$ و $f[\pi,\pi,\pi]$ به ترتیب برابرند با:

۱) $\frac{1}{48}$ و 0

۲) 0 و $-\frac{1}{8}$

۳) 0 و 0

۴) $\frac{1}{48}$ و $-\frac{1}{8}$

۱۸- خطای فرمول $\frac{4f(x_i+h)-f(x_i+2h)-3f(x_i)}{2h}$ برای تخمین $f'(x_i)$ از مرتبه .... است.

۱) h^3

۲) h^2

۳) h

۴) h^4

۱۹- فرض کنید $k>1$ عددی طبیعی و $a>0$. دنباله $\{x_n\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$x_{n+1}=\frac{x_n^k+k\,a\,x_n}{k\,x_n^{k-1}+a}$$

اگر مرتبه همگرایی این دنباله حداقل برابر ۲ باشد، آنگاه ....

۱) $k=3$

۲) $k=2$

۳) $k\le 2$

۴) $k>3$

۲۰- روش‌های ذوزنقه‌ای و نقطه میانی برای تخمین انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_a^b f(x)dx$$

اگر I_T و I_M به ترتیب مقادیر حاصل از روش‌های ذوزنقه‌ای و نقطه میانی باشند، کدام یک از مقادیر زیر روش ذوزنقه‌ای مرکب را برای نقاط a ، $\frac{a+b}{2}$ و b نشان می‌دهد؟

۱) $\frac{1}{2}(I_T+I_M)$

۲) $\frac{2}{3}(I_T+I_M)$

۳) $\frac{4}{3}(I_T+I_M)$

۴) $\frac{1}{4}(I_T+I_M)$

۲۱- معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y'=e^{xy}\ ,\ y(0)=1$$

مقدار $y(0/1)$ با استفاده از روش بسط تیلور مرتبه ۲ با $h=0/1$ برابر است با ....

۱) ۱/۱۰۵۰

۲) ۱/۱۵۵۰

۳) ۱/۱۵۰۵

۴) ۱/۱۰۵۵

۲۲- محاسبه‌ی $T=\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ به ازای مقادیر بزرگ x ، به طوری که مقدار محاسبه شده برای $x+\frac{1}{x}$ برابر x باشد، مدنظر است. عبارت مناسب به عنوان تخمین T کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

۲) $\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

۳) $\frac{2}{\sqrt{x}}$

۴) $\frac{1}{x\sqrt{x}}$

۲۳- درونیابی گویا به صورت $\phi(x)=\frac{a_0+a_1x}{b_0+b_1x}$ به داده‌ی $(0,1)$،$(1,2)$،$(2,2)$ مدنظر است. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\phi(x)$ وجود ندارد.

۲) $\phi(x)=2$ و $\phi(x)=\frac{2x-1}{x}$ جواب هستند.

۳) تعداد توابع ϕ نامتناهی است.

۴) دقیقاً یک تابع ϕ وجود دارد.

۲۴- تابع اسپلاین $S_1(x)$ از درجه‌ی ۳ در بازه‌ی $0 \le x \le 1$ عبارتست از $S_1(x) = x^3 + x^2$. فرض کنید $S_2(x)$ درونیاب اسپلاین درجه‌ی ۳ در بازه‌ی $1 \le x \le 2$ با $S_2'''(x) = 12$ باشد. در این صورت، $S_2(x)$ برابر است با ....

۱) $x^3 - x^2 + 3x - 1$

۲) $2x^3 - x^2 + 3x - 1$

۳) $2x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

۴) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

۲۵- با استفاده از چند جمله‌ای درونیاب $P(x,y)$ به $f(x,y) = x^y$ روی داده‌ی $(1,1)$، $(1,2)$، $(2,1)$، $(2,2)$، مقدار تقریبی $(1/5)^{1/5}$ برابر است با ....

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{9}{2}$

۳) ۲

۴) $\frac{3}{2}$

۲۶- فرض کنید $f \in c^{2n}[a,b]$ و $h(x)$ یک چند جمله‌ای درونیاب هرمیت به نقاط مجزای $(x_i, f(x_i))$ است به طوری که $h(x_i) = f(x_i)$ و $h'(x_i) = f'(x_i)$، $i = 1, \dots, n$. درجه‌ی $h(x)$ حداکثر برابر است با ....

۱) $n - 1$

۲) $2n - 1$

۳) $n + 1$

۴) n

۲۷- روش ذوزنقه‌ای مرکب در بازه‌ی $[a,b]$ با $f'(a)=f'(b)$ و زیر فاصله‌های $h=\frac{b-a}{n}$ دارای خطای برشی از مرتبه‌ی .... است.

۱) h^6

۲) h^2

۳) h^3

۴) h^4

۲۸- فرض کنید $f(x)=\frac{1}{2}x^TGx+g^Tx+b$، که در آن G، $n\times n$، متقارن و معین مثبت است، $g\in R^n$ و $b\in R$ داده شده‌اند. روش نیوتن برای محاسبه‌ی مینیمم f از .... تکرار همگراست.

۱) هر نقطه‌ی شروع به جواب یکتای سراسری Q در یک

۲) برخی نقاط شروع به برخی از جواب‌های موضعی Q در حداقل n

۳) برخی نقاط شروع به برخی از جواب‌های Q در حداقل n

۴) هر نقطه‌ی شروع به جواب یکتای سراسری در حداقل n

۲۹- فرض کنید λ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد و برای $A\subseteq\mathbb{R}$، $A-A=\{x-y:x,y\in A\}$. کدام گزاره نادرست است؟

۱) اگر A اندازه‌پذیر باشد و $\lambda(A)>0$ آنگاه $\lambda(A-A)>0$.

۲) اگر $A\subseteq[0,1]$ اندازه‌پذیر و $[0,1]\setminus A$ در $[0,1]$ چگال باشد آنگاه $\lambda(A)=0$ یا $\lambda(A)=1$.

۳) اگر G زیر گروه جمعی سرهٔ اندازه‌پذیر $\mathbb{R}$ باشد آنگاه $\lambda(G)=0$.

۴) اگر $C\subseteq[0,1]$ مجموعه کانتور باشد، $C-C$ مجموعه‌ای فشرده و همبند است و $\lambda(C-C)>0$.

۳۰- σ-جبر $A = \{E \subseteq \mathbb{R} : E$ یا E^c حداکثر شمارا است$\}$ و اندازه‌ی $\mu(E) = \begin{cases} 0 & E \text{ حداکثر شمارا} \\ 1 & E^c \text{ حداکثر شمارا} \end{cases}$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. اگر μ^* اندازه خارجی تولید شده توسط μ باشد، مقادیر $\mu^*([0,\infty))$ و $\mu^*([0,\frac{1}{2}])$ به ترتیب .... و .... هستند.

۱) ۱ و $\frac{1}{2}$

۲) ∞ و ۱

۳) ∞ و $\frac{1}{2}$

۴) ۱ و ۱

۳۱- فرض کنید $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد. در این صورت:

۱) اگر $|f|$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان است.

۲) اگر f اندازه‌پذیر و f^2 انتگرال‌پذیر لبگ باشد آنگاه f نیز انتگرال‌پذیر لبگ است.

۳) اگر f انتگرال‌پذیر لبگ باشد آنگاه f انتگرال‌پذیر ریمان است.

۴) اگر $|f|$ انتگرال‌پذیر لبگ باشد آنگاه f اندازه‌پذیر است.

۳۲- فرض کنید μ یک اندازه روی X و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی اندازه‌پذیر روی X باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x)| > \frac{1}{2^n}\}) < \infty$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{f_n\}$ تقریباً همه جا به صفر همگرا است.

۲) $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگرا نیست.

۳) اگر $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{x \in X : |f_m(x)| > \frac{1}{2^n}\}$ آنگاه $\mu(E) = 0$.

۴) سری $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ تقریباً همه جا همگرا است.

۳۳- فرض کنید (X,M,μ) یک فضای اندازه باشد و $L^p(\mu)=L^p(X,\mu)$ و $1\le r<p<s<\infty$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $L^p(\mu)\subseteq L^r(\mu)+L^s(\mu)$.

۲) اگر $f\in L^1(\mu)\cap L^2(\mu)$ آنگاه $\lim\limits_{p\to 1^+}\|f\|_p=\|f\|_1$.

۳) اگر $f\in L^1(\mu)\cap L^\infty(\mu)$ آنگاه $\lim\limits_{p\to\infty}\|f\|_p=\|f\|_\infty$.

۴) برای هر f اندازه‌پذیر، $\|f\|_p^p\le \max(\|f\|_r^r,\|f\|_s^s)$.

۳۴- فرض کنید X یک فضای برداری و $(\cdot,\cdot)$ یک حاصل ضرب درونی در آن و $T:X\to X$ یک عملگر خطی باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر X فضای حاصل‌ضرب درونی حقیقی باشد آنگاه شرط کافی برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x\in X$، $(Tx,x)=0$.

۲) اگر X فضای حاصل‌ضرب درونی حقیقی باشد آنگاه شرط لازم برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x\in X$، $(Tx,x)=0$.

۳) اگر X فضای حاصل‌ضرب درونی مختلط باشد آنگاه شرط لازم برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x\in X$، $(Tx,x)=0$.

۴) اگر X فضای حاصل‌ضرب درونی مختلط باشد آنگاه شرط کافی برای آنکه $T=0$ آن است که به ازای هر $x\in X$، $(Tx,x)=0$.

۳۵- اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اندازه‌پذیر بورل باشد و λ اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) تابع $g(x,y)=f(x+y)$ روی $\mathbb{R}^2$، $(\lambda\times\lambda)-$ اندازه‌پذیر است.

۲) توابع فوق همگی اندازه‌پذیر بورل هستند ولی هیچ کدام $(\lambda\times\lambda)-$ اندازه‌پذیر نیست.

۳) تابع $g(x,y)=f(x)f(y)$ روی $\mathbb{R}^2$، $(\lambda\times\lambda)-$ اندازه‌پذیر است.

۴) تابع $g(x,y)=f(x)+f(y)$ روی $\mathbb{R}^2$، $(\lambda\times\lambda)-$ اندازه‌پذیر است.

۳۶- جدول زیر جدول بهینه یک LP است. مجموعه جواب‌های بهینه این LP، یک .... است.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
		۰	۰	۰	۰	۲	۳	۰
x_1		۱	۰	۲	-۱	-۱	۱	۰
x_2		۰	۱	-۲	۱	۲	۳	۰

۱) نیم خط
۲) نقطه
۳) پاره‌خط
۴) خط

۳۷- مسایل برنامه‌ریزی خطی زیر را با $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
Z^* = \max \quad & Z = c^T x \\
& Ax = b \qquad \text{(I)} \\
& x \geq 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
W^* = \min \quad & W = \alpha c^T y \\
& Ay = \beta b \qquad \text{(II)} \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

فرض کنید x^* جواب بهینه مسأله (I) و y^* جواب بهینه مسأله (II) است. در این صورت ....

۱) $Z^* = W^*\,,\ y^* = \alpha\beta x^*$

۲) $Z^* = \frac{\beta}{\alpha} W^*\,,\ x^* = \alpha\beta y^*$

۳) $Z^* = \frac{1}{\alpha\beta} W^*\,,\ y^* = \beta x^*$

۴) $Z^* = \frac{\alpha}{\beta} W^*\,,\ x^* = \beta y^*$

۳۸- مسأله برنامه‌ریزی خطی

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b
\end{aligned}
$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید رتبه $\left(\begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix}\right)$ با رتبه (A) مساوی است. در این صورت، مسأله ....

۱) همواره جواب بهینه دارد.

۲) جواب بهینه دارد اگر شدنی (feasible) باشد.

۳) همواره ناشدنی (infeasible) است.

۴) همواره شدنی (feasible) است.

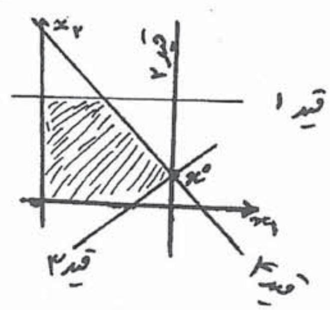
۳۹- در الگوریتم اولیه ـ دوگان (Primal – Dual) داریم:

$$Q = \{j : W^T a_j - c_j = \circ\}$$

که در آن، W یک جواب شدنی برای دوگان است. پس از محورگیری و محاسبه جدول جدید و مجموعه‌ی جدید Q^{new}، کدام گزینه صحیح است؟

۱) هیچ رابطه‌ی مشخصی بین Q و Q^{new} وجود ندارد.
۲) $|Q^{new}| = |Q| + 1$.
۳) $Q^{new} \subset Q$.
۴) $Q \subset Q^{new}$.

۴۰- در شکل زیر ناحیه‌ی هاشورزده ناحیه‌ی شدنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است. تعداد پایه‌های متناظر با x° برابر است با:



۱) ۰
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

۴۱- چند وجهی $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq \circ\}$ با ماتریس رتبه سطری کامل A، $m \times n$، و یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با فضای شدنی (feasible) ناتهی P را در نظر بگیرید. در این صورت، ....

۱) اگر چندین جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه حداقل دو جواب شدنی پایه‌ای بهینه وجود دارد.
۲) در هر جواب بهینه بیش از m متغیر مثبت وجود ندارد.
۳) همواره یک جواب بهینه پایه‌ای وجود دارد.
۴) اگر بیش از یک جواب بهینه وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه جواب‌های بهینه ناشمار است.

۴۲- مقدار هدف بهینه‌ی مسأله‌ی

$$\min \sum_{j=1}^{1391} j^2 x_j$$
$$\text{s.t. } 0 \le x_j \le 1,\ j=1,\dots,1391$$
$$\sum_{j=1}^{1391} x_j = 19$$

برابر است با ....

۱) ۱۹۰ ۲) ۲۴۷۰ ۳) ۱۲۳۵ ۴) ۳۸۰

۴۳- اگر تابع $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعی هم محدب و هم مقعر باشد، آنگاه f تابعی .... است.

۱) ثابت ۲) همانی ۳) درجه دوم ۴) آفینی

۴۴- در جدول سیمپلکس زیر، با فرض $\alpha,\beta,\gamma \ge 0$، شرایطی را که به ازای آنها تعداد جواب‌های بهینه بیش از یکی است، انتخاب کنید.

	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
	0	0	α	β	γ	0	λ
x_2	0	1	α_1	β_1	γ_1	0	λ_1
S_3	0	0	α_2	β_2	γ_2	1	λ_2
x_1	1	0	α_3	β_3	γ_3	0	λ_3

۱) $\alpha=0,\alpha_1>0,\lambda_1=0$

۲) $\alpha=\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

۳) $\alpha=0,\alpha_1>0,\lambda_1>0$

۴) $\alpha=0,\alpha_1\le 0,\lambda_1=0$

۴۵- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را که در آن $A = -A^T$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax \le c \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

دوگان این مسأله معادل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) $\min c^T x$, $Ax \le c$, $x \ge 0$

۲) $\max c^T x$, $A^T x \le c$, $x \ge 0$

۳) $\max c^T y$, $A^T y \ge c$, $y \ge 0$

۴) $\min c^T y$, $A^T y \ge c$, $y \ge 0$